كانتور وصراعه من أجل الأعداد العابرة للمنتهي

بقلم: Joseph W. Dauben[1]

ترجمة د. عمران دلول[2] , د. علي سليمان[3]

يشتهر الأمر الأساسي في حياة كانتور المهنية بتطوير ما أسماه حساب الأعداد العابرة للمنتهي والتي من خلالها أعطى محتوى رياضياً لفكرة اللانهاية الفعلية. بقيامه بهذا الأمر،أسس لأرضيةٍ لنظرية المجموعات المجردة وقدَّم إسهاماتٍ هامةً لأساسيات التفاضل وتحليل استمرارية الأعداد الحقيقية. بعبارةٍ دقيقةٍ، نقول إنَّ إنجاز كانتور اللاّفت هو تبيان أنَّ مفهوم اللانهاية ليس غيرُ قابلٍ للتفاوت فليست جميع اللاّنهايات بالمقاس نفسه وبالتالي فإنَّ المجموعات اللانهائية يمكن أن تقارن ببعضها البعض.

لذلك كانت أفكار كانتور صادمةً ومخالفةً للحدْس حيث أدانها الرياضي الفرنسي الشهير هنري بوانكاريه واصفاً إياها بالمرض الذي ستتعافى منه الرياضيات يوماً ما، وحتى أنَّ الرياضي ليوبولدكرونيكر، أحد أساتذة كانتور وأحد الأعضاء البارزين في المؤسسة الرياضية الألمانية، هاجم كانتور شخصياً واصفاً إياه بـ "المشعوذ العلمي" وبـ "المارق" وبـ "مخرِّب عقول الناشئة". فمن المعلوم أيضاً أنَّ كانتور عانى خلال حياته من سلسلةٍ من الاضطرابات العصبية والتي أصبحت مع تقدمه بالعمر أكثر تكراراً وإضعافاً له. لقد كانت هذه الاضطرابات على الأرجح أعراضاً لمرضٍ عقيمٍ عضويٍّ – في الحقيقة لقد تأكد هذا الأمر فقط مؤخراً من خلال سجلٍ أُعطي من قبل أحد الفيزيولوجيين الذين

1 قسم التاريخ، جامعة نيويورك. هذا المثال متاح على الرابط:
https://acmsonline.org/journal/journal-archives/2004-journal/georg-cantor-and-the-battle-for-transfinite-set-theory/

2 دكتوراه في الرياضيات من جامعة بيروت العربية/لبنان

3 دكتوراه في الرياضيات من جامعة دمشق/سوريا

لازموا كانتور عندما كان مريضاً في مصح هال خلال السنوات الأخيرة من حياته أي من عام 1913 إلى 1918. لقد كتب أحد المتخصصين في علم النفس وهو كارل بوليت:

"بصفتي مساعداً يافعاً فقد عالجتُ أستاذاً مرموقاً في الرياضيات (جورج كانتور) والذي تمَّ نقله للعيادة بموجب معاناته من هوس اكتئابي عصبي."

وعلى الرَّغم من أنه كان من السهل جداً على المؤرخين الأوائل أن يقدموا كانتور، والذي كان يحاول الدفاع عن نظريته بالغة الصعوبة وفي الوقت ذاته كان يُعاني من فترات من الاضطرابات العقلية، على أنه ضحيةٌ بائسةٌ لاضطهاد معاصريه. لكنَّ أكثر السجلات الحسِّية لحياة جورج كانتور شوَّهت الحقيقة من خلال التقليل من أهمية الاهتمامات الفكرية الحقيقية التي حفَّزت بعضاً من أهم المعارضات الفكرية المعاصرة لنظرية كانتور كما أنهم فشلوا في تقدير قوة الدفاع المقدَّمة من قبل كانتور تجاه أفكاره في معركته للفوز بقبولٍ في نظرية المجموعات العابرة للمنتهي. وبموجب شكوكه المبكرة كان قادراً على توقع معارضةٍ من أصقاع عديدة والتي جرَّته لخوض نقاشاتٍ لاهوتيةٍ وفلسفيةٍ إضافةً للرياضية. أضف إلى ذلك، عندما دُعي للرد على منتقديه، كان سيِّد النقاش بأفكاره الجديرة بالاعتبار.

إنَّ مرضه العقلي، كما سأناقش فيما بعد، وبعيداً عن كونه قد لعب دوراً سلبياً، إلا أنه قد ساعد جيداً في حالات الهوس لديه لتقديم الطاقة لعقله المنفرد والذي من خلاله كان قادراً على الدفاع وعلى تعزيز نظريته. إضافةً إلى البعد اللاهوتي في فهم كانتور لللانهاية فإنه أيضاً طمأنه بل في الحقيقة أقنعه، بالحقيقة المطلقة، بغضِّ النظر عما قابله من اعتراضٍ من قبل كرونيكر وأمثاله الذين وقفوا ضدَّ هذه النظرية.

لكن قبل أن نشرع في تقدير الأساسيات ومدى وأهمية معركة كانتور في الفوز بقبولٍ لنظرية المجموعات العابرة للمنتهي فقد يكون مفيداً أن نتحدث باختصار عن حياته وعن التطوير المبكر لنظرية المجموعات.

1. جورج كانتور (1845-1918)

وُلد جورج فردياندلودفيغ فيليب كانتور في السادس من آذار عام 1845 في سان بطرسبرغ حيث انحدرت والدته، التي كانت على ديانة الروم الأرثوذوكس، من عائلةٍ موسيقيةٍ معروفةٍ، وقد كان والده، والذي كان ابناً لرجل أعمال يهودي، تاجراً ناجحاً لكنه كان أيضاً لوثرياً متديناً تلك الديانة التي تزايدت في الانتشار في بطرسبرغ. ومن الجدير بالذكر أنَّ والد كانتور قد أورثه قناعاته الدينية العميقة، وفقاً للكتاب "رجال الرياضيات" لـ "إريك تمبل بل" والذي تمَّت قراءته على نطاقٍ واسعٍ والمنشور عام 1947 فإنَّ اضطرابات كانتور و التي ظهرت لاحقاً في حياته نتيجة التضاد الفرويدي مردُّها إلى نزاعٍ مع والده، لكنَّ الرسائل المتبقاةبالإضافة لأدلةٍ أخرى متعلقةٍ بعلاقتهما معاً تشير إلى عكس ذلك تماماً حيث يظهر والده بمظهر الإنسان الحساس المنصت لأطفاله والمولي بالعناية الخاصة لمصلحتهم وشؤونهم وبتعليم ابنه الأكبر. عندما كان الشاب كانتور حديث العهد انتقلت عائلته من روسيا لألمانيا، وفيها بدأ بدراسة الرياضيات. بعد نيله الدكتوراه بعامين من جامعة برلين عام 1868 شغل منصب محاضر في جامعة هال ذلك المعهد المحافظ الذي لم يكن له ذلك الشأن في الرياضيات كجامعة كوتينغهن أو برلين. كان هنريك هين أحد زملاء كانتور في هال، منكبَّاً على دراسة نظرية السلاسل المثلثية حيث شجَّع كانتور على تولي زمام مسألة صعبة متعلقة بوحدانية مثل هذه السلاسل. في العام 1878، بينما كان عمره 27 سنة، نشر مقالاً يتضمَّن حلاً عاماً للغاية حول هذه المسألة وهذا الحل ينسجم مع نظريته حول الأعداد الحقيقية وبدايات إلى ما سيقوده لاحقاً نحو نظريته حول المجموعات والأعداد العابرة للمنتهي. لقد ظهرت مقالة كانتور الأولى حول السلاسل المثلثية فعلياً قبل عامين أي

عام 1870 فقد بينت أنه إذا كانت الدالة مستمرةً على مجالٍ فإنَّ السلسلة المثلثية الممثلة لها وحيدةٌ. وقد كانت خطوته التالية متمثلةً في تخفيف هذا الشرط والذي هو استمرارية هذا التابع على كامل نقاط المجال من خلال السماح لعددٍ منتهٍ من النقاط بالإخلال بشرط استمرارية التابع.

في العام 1872 كان بحث كانتور الدؤوب حول إيجاد عبارةٍ أعم لمسألة الوحدانية قاده نحو نتيجةٍ مفادها أنه طالما أنَّ النقاط المخلَّة بشرط الاستمرارية موزعةٌ بعنايةٍ فائقةٍ فإنه يمكن أن يكون عددها لانهائياً[1].

إنَّ الجزء الأكثر أهميةً في البرهان على هذه النتيجة الجديدة هو التوصيف الدقيق لهذه المجموعات اللانهائية من النقاط الاستثنائية[2] والتي أطلق عليها كانتور بالكائنات الأولى ونعني بها المجموعات P والتي مجموعاتها المشتقة P^{ν} هي الخالية من أجل عددٍ طبيعيٍّ ما $\nu \in \mathbb{N}$ولكي يصف بشكلٍ دقيقٍ البنية الفعلية لمجموعاته النقطية للكائنات الأولى فقد احتاج نظريةً محكمةً للأعداد الحقيقية لإجراء تحليلٍ دقيقٍ للاستمرارية.

2. كانتور وديدكند: الأعداد الحقيقة

لم يكن كانتور وحده منكباً على دراسة خصائص الاستمرارية بتفصيلٍ دقيقٍ ففي العام 1872، ذلك العام الذي ظهرت فيه مقالة كانتور، كان هناك رياضيٌ ألماني وهو ريتشارد ديدكند قد نشر مقالاً عن تحليل الاستمرارية[3] مستنداً فيه على مجموعاتٍ لانهائيةٍ.في مقاله هذا أوضح ديدكندعن فكرةٍ صاغها كانتور فيما بعد بشكلٍ أدق:

1أي أنَّ السلسلة الممثلة لهذه الدالة ستكون وحيدةً حتى لو كان عدد نقاط انقطاع التابع لانهائي لكن بشرط أن تكون هذه النقاط موزعةً بشكلٍ محددٍ (المترجمان).
2 المخلَّة بشرط الاستمرارية (المترجمان).
3يُقصد بالاستمرارية عادةً مجموعة الأعداد الحقيقية التي تقابل واحداً لواحد نقاط المستقيم ذو الطبيعة المستمرة (المترجمان).

"إنَّ المستقيم باعتباره نقاطاً منفردةً يُعتبر أكثر وفرةً من كامل الأعداد الكسرية والتي هي أيضاً نقاطٌ منفردةٌ".

إلا أنَّ عبارة ديدكندكانت تعاني عدداً من نقاط الضعف. فلو سأل أيٌّ منا ديدكندعن مقدار الوفرة التي تمتلكها مجموعة النقاط اللانهائية في المستمر زيادةً عن الأعداد الكسرية، فلن نلقَ منه أية إجابةٍ. لقدكان إسهام كانتور الأساسي حيال هذا الأمر منشوراً عام 1874 في مجلة كريل. ما بيَّنه كانتور هو أنَّ الأعداد الحقيقية غير قابلةٍ للعدِّ.[1] أنه اكتشافٌ سرعان ما سيغيِّر كثيراً في الرياضيات الحديثة، فقد مقالة كانتور عبارةً عن ثلاث صفحاتٍ بعنوانٍ باهتٍ وغريبٍ جداً: "حول خاصية تشكيلة كل الأعداد الحقيقية الجبرية".

إلا أنَّ من يتأمل عنوان هذا المقال القصير لن يتصور أبداً أنه سيفصح عن اكتشاف كانتور الثوري بخصوص أنَّ استمرارية الأعداد الحقيقية غير قابلةٍ للعدِّ". بل كان المقال ذو العنوان الباهت والمضلِّل عن عمدٍ يقترح بأنَّ المحتوى الأساسي هو نظرية متعلقة بالأعداد الجبرية وبذلك فقد أفشل أيَّ تلميحٍ حول النقطة الأكثر أهميةً والتي كانت تتضمنها المقالة. فما الذي دفع كانتور لاختيار عنوانٍ غير ملائمٍ لشيءٍ سيجده القارئ المعاصر واحداً من أهمّ الاكتشافات في الرياضيات الحديثة؟

في الوقت الذي كتب فيه كانتور أولاً مقالته أواخر عام 1873 كان بعمرٍ يقارب الثلاثين عاماً لكنه كان في بدايات سيرته المهنية في الرياضيات. قبل انضمامه للكلية في جامعة هال عام 1869 فقد درس مع أعظم رياضيي عصره في ألمانيا أمثال كومرووايرشتراوسوكرونيكر. لقد استخدم كانتور في ندوة وايرشتراوس البحثية طريقة التقابل واحداً لواحدٍ لتبيان التكافؤ بين مجموعة الأعداد الكسرية $\mathbb{Q}$ مع مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ وبذلك فقد برهن أنَّ $\mathbb{Q}$ قابلةٌ للعدِّ على الرَّغم من أنها كثيفةٌ[2] في حين

1أي لا يمكن وضعها ضمن متتاليةٍ بأدلةٍ طبيعيةٍ (المترجمان).

2أي أنَّ هناك عددٌ كسريٌّ بين أيّ عددين حقيقيين (المترجمان).

أنَّ مجموعة الأعداد الصحيحة ليست كذلك. هذه الأداة هي نفسها التي استخدمها لاحقاً في مقال العام 1874 لتبيان أنَّ مجموعة الأعداد الجبرية[1] قابلةٌ للعدِّ.

بحلول العام 1872 كان كانتور مهتماً بنحوٍ متزايدٍ ببنية الاستمرارية[2] بسبب الأسئلة التي أثيرت حول نظريات الوحدانية المتعلقة بالتمثيل بواسطة السلاسل المثلثية فهذه النظريات مرتبطةٌ بتقديمه للمجموعات النقطية للكائنات الأولى والتي هي دوماً قابلةٌ للعدِّ. فإذا أعطينا مجموعةً نقطيةً P فإنَّ كانتور قد عرَّف مجموعة نقاطها الطرفية[3] P'. إنَّ مجموعة النقاط الطرفية P' تشكل المجموعة المشتقة الثانية P^2 وهكذا...

حيث يُقال عن مجموعةٍ إنها من الكائنات الأولى إذا وجد عددٌ طبيعيٌ $n \in \mathbb{N}$ بحيث يكون $^{n} = \emptyset$. فلو كان بمقدوره تبيان أنَّ المستمر قابلٌ للعدِّ (كما هو حال الأعداد الكسرية والجبرية والتي تمَّ إثبات قابليتهما للعدِّ) فسيكون بمقدوره أن يُعطي سمة للاستمرارية بدلالة مجموعاتٍ من الكائنات الأولى.

على الرَّغم من أنَّ كانتور قد اعترف في رسالةٍ لديدكند (في الثاني من كانون الأول عام 1873) أنه يبدو منطقياً الافتراض أنه لا يوجد مثل هذا التقارب أي أنه لا يوجد مثل هذا التقابل واحد لواحد بين الأعداد الحقيقية والأعداد الطبيعية إلا أنه لم يجد أيَّ مبررٍ للأخذ بهذا الافتراض. من ناحيةٍ ثانيةٍ،

1نقول عن عدد حقيقي أنه جبريٌّ إذا كان جذراً لكثير حدودٍ بمعاملاتٍ كسريةٍ مثل $\sqrt{2}$ (المترجمان).

2 أي مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ (المترجمان).

3 نقول عن نقطة x في فضاءٍ تبولوجيّ X إنها نقطةٌ طرفيةٌ لمجموعةٍ جزئيةٍ $A \subseteq X$ إذا وجدت متتاليةٌ من عناصر A متقاربةٌ من x (المترجمان).

فقد أدرك أنه لو أثبت استحالة وجود أيِّ تقابلٍ ما بين $\mathbb{R}$ و$\mathbb{N}$فسيكون قادراً على تقديم برهانٍ جديدٍ لنظرية ليوفيلحول وجود الأعداد المتسامية[1].

خلال بضعة أيامٍ وجد كانتور أخيراً الجواب على السؤال وقد كتب إلى ديدكند في السابع من كانون الأول عام 1873 موضِّحاً أنه من المستحيل تقديم أيِّ تقابلٍ واحدٍ لواحد ما بين $\mathbb{N}$ و$\mathbb{R}$. لقد كانت الفرصة سانحةً لكانتور أن يعرض برهانه على وايرشتراوس في نهاية الشهر عندما كان في برلين حيث أُعجب الأخير بهذا العمل وأشار على كانتور أن ينشر عمله في عُجال حيث ظهرت هذه النتيجة خلال أسابيعٍ في مجلة كريل، لكن كما نوهنا سابقاً بعنوانٍ باهتٍ وغير مناسبٍ كلياً: "حول خاصيةٍ لمجموعة كل الأعداد الحقيقية الجبرية".

لنعد الآن إلى السؤال عن اختبار كانتور لعنوانٍ غير دقيقٍ. لقد اقترح والتر وهانز مؤخراً في كتابهما "جورج كانتور" جواباً واحداً حيث ناقشا فكرة أنَّ وايرشتراوس كان مهتماً بشكلٍ أساسيٍّ بنتيجة كانتور حول قابلية العدِّ للأعداد الجبرية ولذلك كان كانتور حريصاً على إدراج هذه النتيجة في عنوان المقالة. على الرَّغم من أنَّ كانتور قد أخبر ديدكند باهتمام وايرشتراوسبقابلية العدِّ للأعداد الجبرية، تلك النتيجة التي سرعان ما طبَّقها الأخير لإعطاء مثالٍ عن دالةٍ مستمرَّةٍ لكنها غير قابلةٍ للاشتقاق، إلا أنَّ السبب الحقيقي وراء إعطاء مثل هذه "الميزة المقيدة" للمقال الذي عرضه كان مردُّه جزئياً، على حدِّ تعبير كانتور،إلى شروطٍ في برلين. فأياً كان المعنى المقصود من هذه الملاحظة الخفية (والتي لم يشرحها أيضاً لديدكند)، فما علاقة ذلك بعنوان مقالته؟

إنَّ جواب ذلك مرتبطٌ بأستاذٍ آخرٍ وهو ليوبولدكرونيكر. بما أنَّ كانتور درس مع كرونيكرفقد كان على اطلاعٍ جيدٍ بعمله المتعلق بنظرية الأعداد والجبر وبنظرته الفلسفية المحافظة للغاية المتعلقة

1 في الحقيقية قام ليوفيل بإنشاء عددٍ وهو السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{10^{n!}}$ وإثبات أنها ليست جذراً لأية كثيرة حدودٍ بمعاملاتٍ كسريةٍ من خلال ما أُطلق عليه لاحقاً بنظرية ليوفيل المتعلقة بتقريبات الأعداد الجبرية بواسطة الأعداد الكسرية (المترجمان).

بالرياضيات. ففي بدايات العام 1870 قام كرونيكر بالمجاهرة برفضه لنظرية بولزانو– وايرشتروواس[1] حول النهايات العليا والدنيا وكذلك الأعداد غير النسبية عموماً. إنَّ أحكام كرونيكر ضدَّ التحليل ونظرية المجموعات إضافةً إلى إصراره الشديد والقاسي بخصوص استخدام الأعداد الصحيحة للحصول على الأساس المرضي الوحيد للرياضيات قد كانت ارتداداتٍ بسيطةً لهذه الآراء الأولى.

وبأخذ هذا الأمر بعين الاعتبار فقد بدا طبيعياً أن نشتبه أنَّ لدى كانتور سببٌ وجيهٌ لتوقع معارضة كرونيكر لعدم قابلية الأعداد الحقيقية للعدِّ. وعلى وجه التحديد، أية نتيجةٍ (كنتيجة كانتور متعلقة بوجود الأعداد المتسامية[2] ستتعرض لانتقاد كرونيكر والأسوأ من ذلك أنَّ كرونيكر كان على رأس مجلس تحرير المجلة التي أرسل لها كانتور مقاله. فلو أنَّ كانتور قد وضع عنواناً ذا صلةٍ مباشرةٍ بمحتوى المقال مثل "مجموعة الأعداد الحقيقية غير قابلةٍ للعد" أو "حول برهانٍ جديدٍ ومستقلٍّ لوجود الأعداد المتسامية" فسيلقى ردَّ فعلٍ سلبيٍّ وقويٍّ من كرونيكر. ففي نهاية الأمر، عندما أثبت ليندمان لاحقاً تسامي العدد π تساءل كرونيكرعن مدى أهمية مثل هذه النتيجة ذلك أنَّ الأعداد غير الكسرية غير موجودةٍ.

بينما كان كانتور يفكر في نشر مقالته عام 1874 فقد كان العنوان الضار خياراً استراتيجياً بكلِّ وضوحٍ، فقد كانت الإشارة فقط للأعداد الجبرية خياراً أفضل لتمرير عين كرونيكر دون أن يلاحظ أحدٌ أنه لم يكن هناك ما يثير الاهتمام الفوري أو اللوم. فلو كانت الفكرة أنَّ كانتور يخشى معارضة كرونيكر في وقتٍ مبكرٍ غير مقبولة فمن الجدير بالذكر أنَّ كرونيكر حاول إعاقة زميل كانتور الأكاديمي في هال وهو ه. هاين من نشر مقاله حول السلاسل المثلثية في مجلة كريل. فعلى الرَّغم من أنَّ مقالة هاين قد

1تنصُّ هذه النظرية على أنَّ أية متتاليةٍ محدودةٍ من الأعداد الحقيقية تمتلك متتاليةً جزئيةً متقاربةً (المترجمان).

2العدد المتسامي هو عدد حقيقي غير جبريّ (المترجمان).

ظهرت أخيراً في مجلة كريلإلا أنَّ كرونيكر كان قد نجح في تأخير صدورها (حيث كان هين صريحاً في رسالةٍ إلى شوارتز والذي كان أيضاً صديقاً لكانتور. هنا الجزء المسطَّر لرسالة هاينلشوارتز في 26 أيار عام 1870 يشرح فيها جهود كرونيكر لمنع نشر مقالته. فمن غير شكٍّ فإنَّ شوارتزوهاين سيثيران نزعة (وقدرة) كرونيكر لمنع نشر أفكارٍ منسجمة مع اهتمامات كانتور التي يختلف معها كرونيكر). بالفعل قام كرونيكر بعد عدة سنوات بتأخير نشر مقالة كانتور عام 1878 حول البعد الثابت (اللامتغير). هذا الأمر أغضب كانتور لدرجة أنه لم يعد يُرسل مقالاته للنشر في مجلة كريل مجدداً. وبعد عقدٍ لاحقٍ اعتبر كانتور أنَّ كرونيكر يمثل تهديداً عاماً وخاصاً ليس فقط لإدانته نظرية المجموعات بل لتحليل وايرشتراوس أيضاً.

إلا أنَّ هناك جانباً إيجابياً من معارضة كرونيكرلعمل كانتور، فقد تمثل في إجباره على تقييم أساسيات نظرية المجموعات أثناء قيامه بإنشائها. أثار هذا الأمر عباراتٍ فلسفيةٍ طويلةٍ في عمل كانتور الرئيسي والمنشور في الثمانينيات من القرن التاسع عشر حول نظرية المجموعات ذو العنوان Grundlageneineralgemeinen عام 1883. ففي هذا العام وضع كانتور إحدى أهم إعلاناته في الرياضيات **وهو أنَّ جوهر الرياضيات يكمن في حريتها**. فهي لم تكن مجرد رسالةٍ فلسفيةٍ أو أكاديميةٍ لزملائه، بل كانت تحمل أيضاً محتوىً شخصياً عميقاً ومخفياً. فقد كان، كما أقرَّ في ذلك لهيلبرت، مبرراً للموضوعية والانفتاح بين الرياضيين. فهذا الإعلان، كما قال، قد استلهمه جرَّاء إجحاف كرونيكر وسلطته غير المنفتحة والأسوأ من ذلك أنه قد قام باستغلالها بشكلٍ فظيعٍ و مدمرٍ ضدَّ من يُعارضه. ولذلك في البدايات الأولى لمسيرته المهنية وحتى ما قبل بدايته في تطوير أيٍّ من أفكاره المثيرة حول نظرية المجموعات العابرة للمنتهي فقد اختبر كانتور قليلاً من المرارة الناجمة عن معارضة كرونيكر لعمله فمن غير شكٍّ أنَّ كانتور قد توقع مزيداً من المشاكل في المستقبل.

لقد حدث أيضاً عام 1883 عندما حاول كانتور بكل نشاطٍ أن يُثبت فرضية الاستمرارية التي تنصُّ بإحدى عباراتها أنَّ مجموعة الأعداد الحقيقية هي المجموعة الأكبر التي تلي مباشرةً المجموعة القابلة للعد. إلا أنَّ جهود كانتور غير الناجحةِ في إثبات هذه الفرضية قد أدَّت لمعاناته من إجهادٍ وجزعٍ ملحوظين. ففي بدايات العام 1884 اعتقد كانتور أنه وجد برهاناً عليها لكن بعد عدة أيامٍ غيَّر رأيه كلياً حيث اعتقد أنه تمكن فعلياً من دحض هذه الفرضية. وأخيراً فقد أدرك أنه غير قادرٍ على إحراز أيِّ تقدمٍ كما أبرق في رسالةٍ إلى ميتاغ-ليفتر. طوال الوقت كان عليه أن يتحمل ضغوطات وتهديدات كرونيكر الذي قال بأنه يُعدُّ مقالاً يبيِّن فيه أنَّ النتائج المرتبة عن نظرية الدوال الحديثة ونظرية المجموعات ليست ذات أهميةٍ حقيقيةٍ. ففي شهر أيار عام 1884 سرعان ما عانى كانتور من أول نوبةٍ عصبيةٍ خطيرةٍ له، فعلى الرَّغم من الإحباط الناجم عن الحاجة للتقدم في فرضية الاستمرارية أو الإجهاد الناجم عن مهاجمة كرونيكر الذي أثار النوبة إلا أنه بدا جلياً أنَّ مثل هذه الأحداث ليس لها علاقةٌ بالسبب الكامن. لقد أخذ المرض بسرعةٍ متزايدةٍ واستمر لمدةٍ تتجاوز الشهر تقريباً. ففي ذلك الوقت، كان يُعترف فقط بالمرحلة المفرطة للهوس الاكتئابي على أنه عرضٌ من أعراض ذلك المرض، فعندما "تعافى" كانتور في نهاية حزيران عام 1884 ودخل مرحلة الاكتئاب كان يشتكي من فقدان الطاقة والاهتمام اللازمين للعودة إلى التفكير الرياضي المحكم. لقد كان راضياً بتولي أمورٍ إداريةٍ في الجامعة لكنه شعر بأنه قادرٌ على تقديم المزيد. فعلى الرَّغم من أنَّ كانتور قد عاد أخيراً للرياضيات إلا أنه أصبح منغمساً في أمورٍ أخرى حيث أجرى دراسةً على التاريخ الإنكليزي والأدب وانشغل بأمورٍ بحثيةٍ قد أُخذت على محمل الجدِّ من قبل الكثير من الناس في ذلك الوقت وبالتحديد الاشتباه في أنَّ فرنسيس بيكون كان هو الكاتب الفعلي لمسرحيات شكسبير! كماحاول جاهداً تدريس الفلسفة بدلاً من الرياضيات لكنه لم ينجح في ذلك وبدأ بالتواصل مع العديد من اللاهوتيين الذين أخذوا بعين الاعتبار الدلالات الفلسفية لنظرياته حول اللانهاية. لقد حظي هذا التواصل بأهميةٍ خاصةٍ لدى كانتور لأنه

كان مقتنعاً بأنَّ الأعداد العابرة للمنتهي قد جاءته عبر رسالةٍ من الإله لكن ما هو أهمُّ من ذلك سنعرضه بعد قليلٍ.

لا يزال هناك شيءٌ أخيرٌ بخصوص تطوير كانتور التقني لنظرية المجموعات العابرة للمنتهي والذي يستحق الذكر على اعتبار أنَّ جزءاً من جهوده المتواصلة لامتطاء دفاعٍ رياضيٍّ مرضٍ ومقنعٍ عن أفكاره ونعني بها بالتحديد طبيعة وحالة الأعداد العابرة للمنتهي.

إنَّ تطور فكر كانتور حول الرئيسيات العابرة للمنتهي أمرٌ أساسيٌّ ذلك أنه على الرَّغم من الألفات $\aleph$ (تلك التي ترمز لرئيسيات كانتور اللانهائية) والتي تعتبر ميراث كانتور الإنشائي،إلا أنها قد مثلت الجزء الأخير لنظريته إما من خلال التعريف الدقيق أو من خلال الرموز الخاصة. بالفعل، فقد كان من الصعب في هذا الإدراك المتأخر الواضح إعادة بناء الغموض الذي فيه كان على كانتور أن يتحسس عمله إلى أن تمَّت المناقشة هنا وعلى نطاقٍ واسعٍ وكأنه يُدرك أنَّ قوة المجموعة اللانهائية يُمكن أن تُفهم على أنها عددٌ رئيسيٌّ.

في الحقيقة، في بداية الثمانينات من القرن التاسع عشر، قدَّم كانتور أولاً ترميز متتاليته اللانهائية (في الحقيقة العابرة للمنتهي) من المجموعات المشتقة P^{ν} موسِّعاً إياهم بشكلٍ جيدٍ إلى ما بعد الحدود التي هو بنفسه وضعها أولاً للمجموعات من الكائنات الأولى. ففيهذا الوقت تحدث فقط عن الأدلة بأنها "رموزٌ لانهائيةٌ" من غير الإشارة لهم بأيِّ شكلٍ على أنهم أعدادٌ.

ففي الوقت الذي كتب فيه البحث Grundlageneineralgemeinen عام 1883، فقد تمَّ أخيراً إنجاز الأعداد الترتيبية العابرة للمنتهي بشكلٍ مستقلٍّ كأعدادٍوحيث أُعطي الترميز الشهير أوميغا[1]ωإلا أنه لم يكن هناك أيُّ ذكرٍ للأعداد الرئيسية العابرة للمنتهي، على الرَّغم من أنَّ كانتور كان على درايةٍ

1الذي يرمز لأول عددٍ ترتيبيٍّ لانهائيٍّ معبراً عن مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ (المترجان).

أنَّ قوة مجموعةٍ يُمكن إثباتها من خلال تكافؤها (أو عدمه) مع أية مجموعةٍ أخرى.إلا أنه كان حريصاً على تجنُّب أيِّ اقتراحٍ مفاده أنَّ قوة مجموعةٍ لانهائيةٍ يُمكن أن تفسَّر على أنها عددٌ.

إلا أنه سرعان ما بدأ بمساواة (تساوي) هذين المفهومين وبحلول شهر أيلول عام 1883 قام بذلك فعلاً في محاضرةٍ بالرياضيات في لقاءٍ تمَّ في فريبرغ. وعلى الرَّغم من ذلك لم يُعطَ أيَّ ترميزٍ لأيِّ عددٍ رئيسيٍّ عابرٍ للمنتهي عن سواه كونه قد تبنَّى مسبقاً الرمز ω لتمييز أصغر عددٍ ترتيبيٍّ لانهائيٍّ فعندما قدَّم أخيراً رمزاً للعدد الرئيسي اللانهائي الأول فقد تمت استعادته من رموزٍ موضوعةٍ مسبقاً لخدمة الأعداد الترتيبية. وبحلول عام 1886 فقد بدأ كانتور في مراسلةٍ له بتمثيل العدد الرئيسي اللانهائي الأول مرمزاً إياه بـ ωوالرئيسي التالي الأكبر بعد ω بـ Ω. إنَّ هذا الترميز لم يكن مرناً تماماً فبعد عدة أشهرٍ أدرك أنه بحاجةٍ لترميزٍ أعم وقادرٍ على تمثيل التسلسل الهرمي الصاعد للرئيسيات العابرة للمنتهي حيث استخدم مؤقتاً Dوبدا جلياً أنه اشتقها من أوميغاته لتمثيل متتاليةٍ من الأعداد الرئيسية. لقد استخدم فعلياً ولمدةٍ من الوقت النجوم كأدلةٍ علويةٍ والخطوط العلوية والفراكتورات[1] بشكلٍ متبادلٍ للرئيسيات العابرة للمنتهي من غير أن يشعر أنه بحاجةٍ للقول أنَّ أحد هذه الترميزاتأفضل من الآخر. لكن في عام 1893 كان هناك عالمٌ رياضيٌّ وهو جيليو فيناني يُعدُّ سجلاً كاملاً لنظرية المجموعات حينها أدرك كانتور أنه حان الوقت لتبني ترميزٍ قياسيّ فحينها فقط قد اختار الألِفات[2]للتعبير عن الرئيسيات العابرة للمنتهي ذلك لأنه قد اعتقد أنَّ الأبجديتين الرومانية واليونانية تمَّ استخدامهما على نطاقٍ واسعٍ في الرياضيات لأغراضٍ أخرى. لقد استحقت أعداده الجديدة شيئاً مميزاً وفريداً ولذلك فقد اختار الحرف العبري ℵ والذي كان متاحاً مسبقاً في الخطوط الألمانية للطباعة. هذا الاختيار ذكياً نوعاً ما حيث كان مسروراً بتقديمه لأنَّ الحرف العبري ℵ كان رمزاً للعدد 1

1الأبجدية اللاتينية بالرسم الألماني ... ,$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ (المترجمان).

2الألفات وهي جمع ألف ℵ وهو الحرف الأول من الأبجدية العبرية (المترجمان).

وبما أنَّ الأعداد الرئيسية العابرة للمنتهي كانت بحدِّ ذاتها وحداتٍ لانهائيةً فإن حرف $\aleph$ يُمكن أن يُؤخذ كبدايةٍ جديدةٍ للرياضيات. ابتكر كانتور عدداً رئيسياً للصف العددي الأول $\aleph_1$ عام 1893 وبحلول عام 1895 غيَّر رأيه إلى $\aleph_0$ ذلك العدد الذي أطلق عليه سابقاً رمز ω والعدد الرئيسي للصف العددي الثاني قد تم ترميزه بـ $\aleph_1$. قام كانتور بإسهامه الرئيسي الأخير في نظرية المجموعات عامي 1895 و1897 حيث استخدم مسبقاً طريقته الشهيرة في التقطير عام 1891 لتبيان أنَّ العدد الرئيسي لأية مجموعةٍ يقلُّ دوماً عن العدد الرئيسي لمجموعة كل أجزائها. وبعد عدة سنواتٍ، قدَّم استنتاجاً مباشراً لنتيجته بأنَّ العدد الرئيسي للمستمر (أي $\mathbb{R}$) هو $2^{\aleph_0}$حيث أمل من خلال هذه النتيجة أن تقوده لحل فرضية الاستمرارية والتي يُمكن أن تُصاغ ببساطةٍ الآن: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

إلا أنَّ مناقشة برهان كانتور بخصوص العدد الرئيسي لمجموعة كل المجموعات الجزئية قد أدَّت إلى استنتاجاتٍ بعيدة المدى ولعلَّ أهمها تلك التي توصَّل إليها برتراند راسل عام 1903. بيَّن راسل أنه يُمكن الحصول على مفارقةٍ في نظرية المجموعات من خلال أخذ كلِّ المجموعات التي لا تنتمي لأنفسها. تشير مفارقة راسل إلى أنَّ هناك شيءٌ ما خاطئٌ في تعريف كانتور للمجموعة حيث أنَّ النتائج المترتبة على هذا الإدراك ستصبح على الفور مسألةً هامةً في رياضيات القرن العشرين[1]إلا أنه وحتى قبل راسل كان لدى كانتور صيغته الخاصة بمفارقات نظرية المجموعات على شكل تناقضاتٍ والتي ربطها بفكرة العدد الترتيبي أو الرئيسي الأكبر حيث تمَّ شرحها جميعاً في رسالةٍ لهيلبرت أولاً عام 1897 ومن ثمَّ إلى ديدكند عام 1899 فعلى سبيل المثال، في مسودة رسالته إلى ديدكندفي الثالث من آب عام 1899 كتب كانتور بين مواد الإضافات والتقاطعات العديدة إلى جانب حرف Aالكبير في الهامش الأيسر ما يلي: "إنَّ النظام Ω المؤلف من كل الأعداد غير منسجمٍ absolutunendlicheVeilheil" أي أنه إجمالي

1لقد أدى هذا الإدراك إلى اعتبار أنَّ تشكيلة كل الأعداد الرئيسية أو تشكيلة كل الأعداد الترتيبية لا يُمكن إدراجها ضمن تعريف المجموعات ولتجنُّب هذا الأمر فقد تمَّ تقديم المصطلح صفوف خاصة proper classes لتجنب الوقوع في مفارقة راسل (المترجمان).

لانهائي مطلق غير منسجمٍ. ولكن قد يكون من المحتمل، كما أود أن نقترح ذلك الآن من خلال استنتاج، أنَّ كانتور كان مدركاً لمفارقات نظرية المجموعات في وقتٍ باكرٍ جداً ولربما في بدايات الثمانينيات من القرن التاسع عشر عندما كان مشاكله مع كرونيكر تثقل على ذهنه وقد كان حينها في طور البدايات فقط لاختبار مشاكله التقنية الأولى لنظرية المجموعات. فعلى سبيل المثال، في بدايات بحثه Grundlagen عام 1883 أشار إلى تشكيلاتٍ كبيرةٍ جداً كي يتمَّ فهمها، على حدِّ تعبيره، كوحداتٍ موحدةٍ ومكتملةٍ ومعرفةٍ جيداً. ولسوء الحظِّ، فقد كتب بشكلٍ غير مفهومٍ للإشارة لمجموعاتٍ مغلقةٍ بتعابير لاهوتيةٍ شارحاً أنَّ "اللانهاية الحقة أو المطلقة, تلك التي تكمن في الإله، تبقى بلا تحديدٍ". في هامشٍ سفليٍّ مرافقٍ للبحث Grundlagen فقد ذهب لأبعد من ذلك شارحاً أنَّ التسلسل اللانهائي المطلق للأعداد[Zahlenfolge]تبدو لي رمزاً مناسباً للمطلق" فهل كان ذلك تلميحاً منه أنه كان على درايةٍ مسبقاً بأنَّ تشكيلة كل الأعداد الترتيبية غير منسجمةٍ وبالتالي لا يمكن اعتبارها مجموعة؟ لقد قال كانتور لاحقاً أنَّ هذا هو بالضبط ما يعنيه -إنها إشارةٌ مبطنةٌ- وحتى أنه في ذلك الوقت كان مدركاً للنتائج المتعارضة التي تنتج جرَّاء تحديد العدد الترتيبي العابر للمنتهي الذي يجب أن يُقابل المجموعة المرتبة جيداً والمؤلفة من كل الأعداد الترتيبية العابرة للمنتهي.[1] في منتصف تسعينيات القرن التاسع عشر لم يعد كانتور غامضاً بخصوص الكائنات الغامضة فقد أُجبر على التحلي بالدقة حيال المفارقات الناجمة عن مجموعات كلِّ الأعداد الترتيبية أو كلِّ الأعداد الرئيسية. فالحل الذي ابتكره للتعامل مع مثل هذه المفارقات الرياضية كان ببساطةٍ أن يطردهم من نظرية المجموعات. فأيُّ شيءٍ يمكن اعتباره كبيراً جداً كي يتم استيعابه كمجموعةٍ موحدةٍ ومعرفةٍ جيداً قد تمَّ النظر إليه على أنه غير منسجمٍ. إنَّ هذه كائناتٌ "مطلقةٌ" وتقع خارج نطاق التحديد الرياضي وهذا هو بالضبط جوهر تواصل كانتور مع هيلبرت أولاً عام 1897 ولاحقاً في فترةٍ ما مع ديدكند عام 1899. فأياً كان مدى إدراك كانتور للمفارقات

1حينها سيكون هذا العدد الترتيبي عنصراً في تلك المجموعة وبذلك سيكون ذو رئيسي أقل منه وهذا تناقض (المترجمان).

التي وُجدت أوائل ثمانينيات القرن التاسع عشر فقد كان حساساً تجاه معارضة كرونيكر الصريحة والمتزايدة وفوق كل ذلك فقد كانت المخاوف الفلسفية المحضة والمُعبر عنها في Grundlagenجوهريةً بشكلٍ استراتيجيّ في نظر كانتور لدفاعٍ شاملٍ عن نظريته الجديدة. فهذه النظرية ليست غريبةً في ذلك الوقت فحسب بل في يومنا هذا أيضاً فعندما طلب ميتاغ-ليفتر من كانتور الإذن لنشر الترجمة الفرنسية لمقالاته حول نظرية المجموعات لصالح مجلته المنشأة حديثاً ActaMathematica فقد عمل على إقناع كانتور أن يحذف جميع الفقرات الفلسفية في بحث Grundlagen معتبراً إياها غير لازمةٍ (ولربما مستهجنة من قبل ميتاغ-ليفتر) للرياضيين الذين يجدونها مهمةً رياضياً لكنها غير مقبولةٍ فلسفياً. إلا أنَّ المناقشات الفلسفية كانت أساسيةً لكانتور لكنها لم تكن كذلك لميتاغ-ليفتر. فقد كانت هذه المناقشات جوهريةً لكونها جزءاً من دفاعٍ متقنٍ قد بدأه لتشييد مقاومةٍ هدَّامة ضدَّ آراءٍ من مختلف الأصقاع وبشكلٍ خاصّ ضد كرونيكرفقد كانت الحيلة بإنجاز تبريرٍ يرتكز على حرية الرياضيات لتقبّل نظريةٍ منسجمةٍ ذاتياً. فيُمكن أن تُحدد التطبيقات في نهاية المطاف أيٌّ من هذه النظريات الرياضية نافعٌ. لكن بالنسبة للرياضيين فقد أصر كانتور على أنَّ السؤال الحقيقي هو فقط عن التناغم (الإنسجام). لقد مثَّل ذلك فقط التوضيح الذي احتاجه لتحدي الرياضيين المؤسسين كأمثالكرونيكر. ففي بداية مهنته شعر كانتور بوضوحٍ أنه مجبرٌ على الدفاع بكلِّ ما يستطيع عن السمعة العادلة لأعماله فبقدر ما تكون منسجمةً ذاتياً يجب أن تكون مشروعة رياضياً والطبيعة التركيبية والنقدية المحدودة لكرونيكريجب أن يتم تجاهلها من قبل معظم الرياضيين الذين يرون أنه يجب أن يكون الانسجام لوحده الاختبار القابل للتطبيق. لقد وضع كانتور مبدأ حرية الرياضيات موضع التنفيذ في بدايات تسعينيات القرن التاسع عشر عندما وصلت سيرته المهنية لمرحلةٍ باستطاعتها إجراء أكثر من مجرد توحيدٍ مستقلٍّ للرياضيين في ألمانيا، فقد كان الهدف الأساسي من مثل هذا الاتحاد كما كان واضحاً من مراسلاته، هو تأمين منصةٍ مفتوحةٍ وبخاصةٍ للرياضيين الشباب. فالاتحاد

(كما تصوره كانتور) يضمن أنَّ أيَّ شخصٍ سيجد الحرية النقاش المفتوح للنتائج الرياضية من دون الإدانات المجحفة من قبل الأعضاء المؤسسين الأوائل الذين قد يُدمر تحفظهم مسيرة إلهام الرياضي. وفوق كلِّ ذلك، فقد كان ذلك ضرورياً في الحالات التي تكون فيها الأفكار موضع التساؤل جديدةً وثوريةً أو جدليةً.

عمل كانتور بجدٍّ على تأسيس Deutsche MathematikerVereinigung فقد تمَّ التوصل أخيراً لاتفاقيةٍ حيث عقد اتحاد الرياضيين الألمان أوَّل اجتماعٍ مرتبطاً باللقاء السنوي GesellschaftDeutscherNaturforscher und Aerzteوالذي كان في هال عام 1891. لقد اختير كانتور أوَّل رئيسٍ للاتحاد ففي خطاب اللقاء قدَّم كانتور برهانه الشهير بخصوص أنَّ الأعداد الحقيقية غير قابلةٍ للعد مستخدماً طريقة التقطير المنسوبة له[1]. لم يكن الاتحاد الألماني آخر ما كان يطمح له كانتور فقد أدرك أنه بحاجةٍ للترويج لمنتدياتٍ دوليةٍ فقد بدأ بعد تشكيل DMV بالإقناع لإجراء مؤتمراتٍ دوليةٍ منتظمةٍ. فقد نُظمت أخيراً من خلال جهودٍ مشتركةٍ للعديد من الرياضيين والجدير ذكره أنَّ هذه الأمور لم تكن لتتواجد لولا الجهود الاستثنائية لكانتور. لقد انعقد أول هذه المؤتمرات في زيوريخ عام 1897 والثاني في باريس عام 1900. فقد كان الترويج لطرقٍ في النقاشات الرياضية بمثابة طريقةٍ توصَّل إليها كانتور لمعارضة أيِّ نوعٍ قد استفزَّ بحثه الخاص. فبرغم الانتقاد وبخاصةٍ من كرونيكربقي كانتور صامداً وحتى في مواجهة فشله المتكرر لحلِّ أحد أهمِّ الأسئلة الأساسية في نظرية المجموعات (فرضية الاستمرارية البارزة) وحتى في بداية معاناته من النوبات المتكررة بشكلٍ دوريٍّ من الهوس الاكتئابي فمن سخرية القدر، كحال صراعه مع كرونيكر، فقد كان هوسه موضع خدمة له في أغراضٍ مفيدةٍ. ففي رأيه الخاص، فقد كانتمرتبطةً بالدعم المعصوم لنظرية المجموعات والتي اكتسبها من خلال قناعاته

1هذه الطريقة هي ببساطةٍ وضع الأعداد الحقيقية بشكلها العشري على شكل قائمةٍ لانهائيةٍ ومن ثمَّ تعريف عددٍ جديدٍ من خلال استبدال كلِّ رقمٍ من أرقام أعداد هذه المتتالية وبذلك يكون هذا العدد الجديد خارج القائمة وهو في الوقت نفسه عددٌ حقيقيٌّ وهذا يتناقض مع قابليتها للعدِّ (المترجمان).

الدينية القوية. تكشف رسائل (كما شهادات زملاءٍ له يعرفونه) أنَّ كانتور كان مؤمناً أنه قد اختير من الإله لجلب حقائق نظرية المجموعات لجمهورٍ واسعٍ. كما قد اعتبر أنَّ الموجات المتلاحقة من الهوس الاكتئابيالذي بدأ بإزعاجه بشكلٍ مستمرٍّ في ثمانينيات القرن التاسع عشر –الذي جعله في ذروة النشاط المكثف الناجم عن الفترات الطويلة الأمد من التأمل الذاتي- على أنه إلهامٌ إلهي. إنَّ الفتراتِ الطويلةً من العزلة في المشفى قد أمَّنت له فرصاً لانعكاسٍ غير متقطِّع حيث تصوَّر كانتور خلالها وفوداً من وحيٍّ ذوات أصواتٍ تؤكد عليه بالحقيقة الطلقةلنظرية المجموعات، بغضِّ النظر عمَّا قد يقوله آخرون حول ذلك.

وضمن سياق الترويج لنظرية المجموعات بين الرياضيين والفلاسفة وعلماء اللاهوت (حتى أنه كتب للأب ليو الثامن حول نقطةٍ في موضوع اللانهاية)، فقد كانتور مقتنعاً أنه سينجح في جلب الاعتراف بنظرية المجموعات العابرة للمنتهي الذي يليق بها.

فمن خلال التأكيد على الانسجام الذاتي والحرية الجوهرية للرياضيات فقد قام بتطوير عنصرٍ أساسيٍّ لأي مطلبٍ فكريٍّ. فالعقل يجب أن يكون حرَّاً لتعقب الحقيقة أياً ما كانت تقود فالإلهام يجب أن يتمَّ تشجيعه لا أن يكون خاضعاً للتحيز التعسفي وقد عنى ذلك لكانتور أن يتمَّ تقبُّل النظريات التي يتمُّ الحكم عليها علمياً فقط من قِبل معايير الانسجام والتوجيه.

3. أوجه نظرية المجموعات

في الختام، هناك صلةٌ أخرى هامةٌ ما بين مرض كانتور العقلي ورياضياته جديرة بالذكر حيث تشير مستنداتٌ معينةٌ أنه إضافةً للفتراتٍ الدورية من المعاناة والانسحاب من الشؤون اليومية فإنَّ فترات الاكتئاب لكانتور لم تكن غير منتجةٍ بالكامل ففي واقع الأمر غالباً ما كان قادراً على تتبع أفكاره

الرياضية في عزلته بالمشفى أو في هدوء منزله. في الحقيقة، كما أشار في الشعار الثالث لمقاله الأخير المنشور وهو بحث Beitrage في العام 1895:

"سيأتي الوقت عندما تكونهذه الأشياء والتي هي مخفية عنك قد أُحضرت عبر الضوء".

هذا المقطع معروفٌ في كتاب الإنجيل كورنيات الأول، حيث يعكس إيمان كانتور أنه كان يلعب دور الوساطة في الكشف والإظهار كما يمكن أن تفيد في عكس إيمان كانتور أنه برغم المقاومة الظاهرة لعمله فإنه سيأتي يومٌ ما يتمتع فيه هذا العمل بالاعتراف والمديح من قِبل الرياضيين من جميع الأصقاع.

فمن السهل إساءة فهم العنصر الديني في فكر كانتور كما يفعل ذلك عادةً العوام كما حدث بالتحديد في وقتٍ ليس بالبعيد عندما عرضت المجلة الفرنسية La Recherche الكاريكاتير المبيِّن كتوضيحٍ عن كانتور وقناعاته الدينية ومرضه النفسي ونظرية المجموعات العابرة للمنتهي. تصف الرسمة الأولى جورج كانتور في حالة بهجةٍ غامرةٍ كما لو أنه يتلقى رسالةً إلهيةً أما الثانية التوضيحية حيث تظهر شخصاً حاملاً لسلاحٍوهو المقصود طبعاً كرونيكر حيث يساعد الإله كانتور ليحافظ على توازنه بينما تستند جميعها بشكلٍ احتراسيٍّ على عدد أَلِف العابر للمنتهي.

لكن هناك جانبٌ جدِّيٌّ من كلِّ هذا، ويستحق إعطاءه تركيزاً فعلى سبيل المثال، بعد فترةٍ طويلةٍ من النقاهة في المشفى عام 1908، كتب كانتور لصديقٍ له في كوتينغن، وهو الرياضي البريطاني غريس تشيشولم يونغ، حيث وصف له هوسه الاكتئابي بأنه قد أكسبه قدرةً خلاقة:

"إنه لمصيرٌ غريب الأطوار، والذي بحمد الله لم يكسرني، بل في الحقيقة جعلني أقوى داخلياً وأكثر سعادةً وأملاً مما قضيته في السنوات الأخيرة والتي جعلتني بعيداً عن المنزل بل يُمكنني أن أقول جعلتني بعيداً عن العالم... ففي عزلتي الطويلة لم تنم أو ترقد بداخلي الرياضيات ولا حتى نظرية

الأعـداد العـابرة للمنتهي، إنَّ منشـوري الأول خـلال سـنواتٍ والـذي سـوف أنجـزه سـيكون مخصصـاً لـ "جمعية لندن للرياضيات".

وفي مكانٍ آخرٍ وصف كانتور فعلياً قناعاته بخصوص صوابيةنظريته بعباراتٍ محددةٍ شبه دينيةٍ:

"تقف نظريتي بثباتٍ كالصخر، فكلٌّ سهمٍ موجهٌ لها سيرتدُّ سريعاً نحو راميه. فكيف أدركت ذلك؟ لأنني قمتُ بدراستها من جميع الجوانب لسنواتٍ ولأنني اختبرتها من جميع الأوجه لسنواتٍ ولأنني اختبرت جميع الاعتراضات على الأعداد اللانهائية وفوق كلِّ ذلك لقد تتبعتُ جذورها إلى السبب الأول للمعصوم لنشأة الأشياء المخلوقة."

فقد تقوم الأجيال التالية بصرف النظر عن هذه الفلسفة ولربما تنظر بعين الارتياب إلى إشاراتها الوفيرة باتجاه القديس توما أو الآباء الكنسيين وقد يتغاضون عن التصريحات الميتافيزيقية والتي تفتقد تماماً للجذور الدينية العميقة لإيمان كانتور في الحقيقة المطلقة لنظريته. لكنَّ كلَّ هذه الارتباطات والالتزامات قد ساهمت في تصميم كانتور على عدم التخلي عن الأعداد العابرة للمنتهي حيث بدا جلياً أنَّ المعارضة التي واجهها قد ساهمت في تقوية عزيمته وتصميمه، فصبره كما أيُّ شيءٍ آخر قد ساهم وأكَّد أنَّ نظرية المجموعات ستبقى وتصمد في السنوات الأوائل لها والمفعمة بالشك والإدانات لتزهر في النهاية قوةً ثوريةً نشيطةً في رياضيات القرن العشرين.